№ 7 дәріс.

Үзіліссіз функциялар анықтамалары. Үзіліс нүктелері және олардың түрлері. Үзіліссіз функциялардың аралық мәні туралы. Больцано –Коши, Вейерштрасс теоремалары.

Айталық $f : E \to \mathrm{R}$ белгілі бір $E \subset \mathrm{R}$ жиынында анықталған нақты мәнді функция, ал a оның анықталу аймағының нүктесі болсын.

Егер a нүктесінде қабылдайтын $f(a)$ функция мәнінің кез-келген $V(f(a))$ маңайы үшін $f(U_E(a))$ бейнесі осы $V(f(a))$ маңайында жататын a нүктесінің E жиынынан $U_E(a)$ маңайы табылса, онда $f : E \to \mathrm{R}$ функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

Мұны кванторлар арқылы былай жазар едік: ($f : E \to R$ функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз $) := \forall V(f(a)) \exists U_E(a)(f(U_E(a)) \subset V(f(a)))$.

Сандық бағалауларда аса пайдалы, тіпті қажетті болатын функцияның нүктеде үзіліссіздігінің $"\varepsilon-\delta"$ тіліндегі анықтамасын келтірейік.

($f: E \to \mathbb{R}$) функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз

$$:= \forall \varepsilon > 0\, \exists U^{\delta}_{E}(a)\, \forall x \in U^{\delta}_{E}(a) \left(|f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$$

немесе

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right).$$

1-теорема.Айталық a E жиынының шектік нүктесі болсын. $f: E \to \mathbb{R}$ функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз сонда және тек сонда, егер $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Дәлелдеуі. Егер f a нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(\overset{0}{U}(a)) \subset V(f(a))$ болатын a нүктесінің $U_E(a)$ маңайы табылады. Сонымен бірге $f(\overset{0}{\cup}(a)) \subset V(f(a))$, сондықтан шек анықтамасы орындалады, демек, $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Енді, керісінше, $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$ болса, онда $V(f(a))$ маңайы арқылы $f(\overset{0}{\cup}(a)) \subset V(f(a))$ болатын $\overset{0}{\cup}_E(a)$ ойылған маңайын табамыз. Ал $f(a) \subset V(f(a))$ болғандықтан, $f(\cup_E(a)) \subset V(f(a))$, демек, функция үзіліссіздігінің анықтамасы бойынша f функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз. Теорема дәлелденді.

Сонымен, бұл критерийден, $E \in R$ жиынында анықталған $f: E \to \mathbb{R}$ нақты мәнді функциясы E жиынынын a нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

болса. Кейде бұны өсімшелер тілінде де жазған ыңғайлы. $x - a = \Delta x$ санын функция аргументінің немесе тәуелсіз айнымалының a нүктесіндегі өсімшесі деп,ал $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f(a)$ санын функцияның немесе тәуелді айнымалының өсімшесі деп айтады.

Егер тәуелсіз айнымалының a нүктесінде өсімшесі нөлге ұмтылғанда оған сәйкес f функциясының өсімшесі нөлге ұмтылса (яғни $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$), онда f функциясын a нүктесінде үзіліссіз деп атайды.

Егер f функциясының анықталу аймағы $[c,d]$ кесіндісі болса, онда оның c және d нүктелерінде бір жақты үзіліссіздік ұғымы енгізіледі.

Егер $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = f(c)$ болса, онда $f(x)$ функциясын c нүктесінде оң жақты үзіліссіз деп, ал егер $\lim\limits_{x \to d-0} f(x) = f(d)$ болса, онда $f(x)$ функциясын d нүктесінде сол жақты үзіліссіз деп атайды.

Үзіліссіздіктің анықтамасын шектің анықтамасындағы сияқты тізбектер тілінде де береді: егер $x_n \in E, x_n \to a, n \to \infty,$ шарттарын қанағаттандыратын кез-келген $\{x_n\}$

тізбегіне сәйкес $\{f(x_n)\}$ тізбегінің шегі бар және ол $f(a)$ санына тең болса, онда $E \subset R$ жиынында анықталған $f : E \to \mathrm{R}$ функциясын $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз деп атайды. Егер $x_n \geq a \ \forall n \in N, x_n \to a, n \to \infty,$ болатын сандық тізбегіне сәйкес

$f(x_n) \to f(a), n \to \infty,$ болса, онда f функциясын a нүктесінде оң жақты үзіліссіз деп айтады. Дәл осылай сол жақты үзіліссіздікті де анықтайды.

$f : E \to \mathrm{R}$ функциясы E жиынында үзіліссіз деп аталады, егер ол E жиынының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса әрі мұны $f \in C(E,R)$ немесе $f \in C(E)$ деп те жазады.

$f : E \to \mathrm{R}$ функциясы үзіліссіз болатын $a \in E$ нүктесі f функциясының үзіліссіздік нүктесі деп аталады, ал $f(x)$функциясының үзіліссіздік нүктесі болмайтын нүкте $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады.

Үзіліс нүктесінің де әртүрлі эквивалентті анықтамалары бар.

Егер берілген $\varepsilon > 0$ саны мен кез-келген $\delta > 0$ саны үшін $|\tilde{x} - a| < \delta$ және $|f(\tilde{x}) - f(a)| \ge \varepsilon$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $\tilde{x}$ саны табылса, онда a нүктесін $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп атайды.

“$f : E \to \mathrm{R}$ функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз” - деген тұжырымның керілеуін жазып, a нүктесінің f функциясының үзіліс нүктесі екендігінің анықтамасын аламыз:

$$\exists V(f(a))\ \forall U_E(a)\ \exists \tilde{x} \in U_E(a)(f(\tilde{x}) \notin V(f(a)))$$

немесе

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0\ \exists \tilde{x} \in E(|\tilde{x} - a| < \delta \wedge |f(\tilde{x}) - f(a)| \ge \varepsilon).$$

Егер $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$ және $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ шектері бар, бірақ $f(a+0) \ne f(a-0)$ болса, онда a нүктесі $f(x)$ функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады. Егер $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі жоқ болса, онда a нүктесі $f(x)$ функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

Мысалы, $g(x) = sgn\, x$ функциясының шектері $\lim\limits_{x \to 0+0} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-0} g(x) = -1$ демек, $x = 0$ нүктесі $sgn\, x$ функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі. Ал

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x},\ x > 0, \\ 0,\ x \le 0 \end{cases}$$

функциясының $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$ шегі жоқ, өйткені нөлге жинақталатын $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$ тізбегіне сәйкес $\{f(x_n)\}$ тізбегі нөлге ұмтылады, ал тағы да бір нөлге жинақталатын $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ тізбегіне сәйкес $\{f(x_n)\}$ тізбегі бірге ұмтылады, демек, функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасы бойынша $f(x)$ функциясының оң жақ шегі жоқ. Бірақ $\lim_{x\to 0-0} f(x)=0$ яғни $f(x)$ функциясы 0 нүктесінде E=$\left\{x_n=\frac{1}{\pi n}, n\in N\right\}$ жиынында сол жақ үзіліссіз. Сонымен, біздің қарастырып отырған функциямыз 0 нүктесінде екінші текті үзілісті.

Егер $f(x)$ функциясының $x\to a$ ұмтылғанда шегі бар, бірақ $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ болса, онда a нүктесін $f(x)$ функциясының жөнделетін үзіліс нүктесі деп атайды. $|f(a+0)-f(a-0)|$ санын f функциясының a нүктесіндегі секірмесі деп атайды. Өзара тең оң жақ және сол жақ шектері бар, яғни секірмесі нөлге тең f функциясын тек бір ғана a нүктесінде өзгертіп, сол нүктеде үзіліссіз болатын функция етуге болады, яғни

$$g(x)=\begin{cases} f(x), \text{ егер } \quad x\neq a \quad \text{болса} \quad , \\ f(a+0)=f(a-0), \text{ егер } \quad x=a \text{ болса} \end{cases}$$

функциясы a нүктесінде үзіліссіз.

Бірсарынды функцияның тек бірінші текті үзіліс нүктелері ғана болуы мүмкін, өйткені ондай функциялардың әр үзіліс нүктесінде бір жақты шегі бар.

$f(x)$ функциясын E жиынында үзілісті деп айтамыз, егер оның осы жиында ең болмағанда бір үзіліс нүктесі бар болса. E жиынында анықталған $f: E\to \mathbb{R}$ функциясы бұл жиынды үзіліссіз нүктелерден және үзіліс нүктелерден тұратын екі жиынға жіктейді.

Барлық нүктелерде үзілісті болатын функцияның мысалы

$$D(x)=\begin{cases} 1, \text{егер } x\in Q, \\ 0, \text{егер } x\in R|Q \end{cases}$$

Дирихле функциясы. Шынында да, мұның барлық нүктелері-екінші текті үзіліс нүктелері, өйткені кез-келген нүктенің кез-келген маңайында рационал нүкте де, иррационал нүкте де бар.

Үзіліс нүктелері мен үзіліссіз нүктелер саны ақырсыз болатын функция мысалы

$$\begin{cases} 0, \text{ егер } \; x\in R/Q, \\ \Re(x)=\frac{1}{n}, \text{ егер } \quad x=\frac{m}{n}\in Q, \; (\frac{m}{n} \text{ -қысқармайтын бөлшек}) \end{cases}$$

Риман функциясы. Бұл функция әрбір рационал нүктеде үзілісті де, ал әрбір иррационал нүктеде үзіліссіз. Ең алдымен $a\in R$ нүктесіде, оның $U(a)$ маңайыда және $N\in \mathbb{N}$ саныда қандай болмасын $n<N$ болғанда $U(a)$ маңайында жататын $\frac{m}{n}$ рационал сандар саны ақырлы екенін байқаймыз, өйткені мұндағы $m\in \mathbb{Z}$, $n\in \mathbb{N}$. Енді маңайды кішірейте отырып, онда жататын барлық рационал сандар бөлімі N санынан үлкен болатынын көреміз, әрине тек a санынан басқа, егер $a\in Q$ болса. Сонымен кез-келген $x\in \overset{0}{U}(a)$ нүктесінде $|\Re(x)|<\frac{1}{N}$. Демек, кез-келген $a\in R$ нүктесінде

$$\lim_{x\to a}\Re(x)=0 \tag{1}$$

Мұнан кез-келген иррационал нүктеде Риман функциясының үзіліссіз екенін көреміз, өйткені (1) бойынша a иррационал болса $\Re(a)=0$.

Енді егер $a=\frac{m}{n}$ $(n>0)$ рационал болса, онда $\Re(x)=\frac{1}{n}>0$. Сонда (1) бойынша $\Re(a+0)=\Re(a-0)=0\neq\frac{1}{n}=\Re(a)$, яғни a нүктесі $\Re(x)$ функциясының жөнделетін үзіліс нүктесі.

Үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1-теорема. Егер $f: E \to \mathrm{R}$ және $g: E \to \mathrm{R}$ функциялары $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде $(f \pm g)(x), (f \cdot g)(x), (\frac{f}{g})(x) (g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E)$ функциялары да үзіліссіз.

Дәлелдеуі. Дәлелдеуі үзіліссіз функция анықтамасы мен III-тараудың 4-параграфының 1-теоремасынан шығады.

2-теорема. Егер $f: E \to R$ функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда f функциясы шенелген болатын a нүктесінің $U_E(a)$ маңайы табылады.

Дәлелдеуі. $f(x)$функциясы aнүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$ яғни енді ε санын тиянақтап алып, оған сәйкес $|x-a| < \delta$ болғанда $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ орындалатын δ санының табылатынын көреміз. Демек, $f(x)$ функциясы $U(a) \equiv \{|x-a| < \delta\}$ маңайында шенелген.

3-теорема. Егер $f: E \to \mathrm{R}$ функциясы $a \in E$ нүктесінде үзіліссіз және $f(a) \neq 0$ болса, онда aнүктесінің $|x-a| < \delta$ маңайы табылып, бұл маңайда функция өз таңбасын сақтайды.

Дәлелдеуі.Анықтылық үшін $f(a) > 0$ болсын. Функцияның aнүктесінде үзіліссіздік анықтамасы бойынша $\varepsilon = f(a)$ саны үшін $|x-a| < \delta$ болғанда $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a),$ яғни $f(x) > 0\, \forall x \in U_E^{\delta}(a).$

4-теорема (күрделі функция үзіліссіздігі). Егер $f: E \to \mathrm{R}$ функциясы aнүктесінде үзіліссіз, ал $g(y)$ функциясы $f(a) = b$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $h(x) = g(f(x))$ күрделі функциясы aнүктесінде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. $g(y)$ функциясы $f(a) = b$ нүктесінде үзіліссіз болғандықтан, $\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta > 0$

$$\forall y \in f(E) \subset F\, (|y-b| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon),$$

ал $f(x)$ функциясы aнүктесінде үзіліссіз болғандықтан $\eta > 0$ саны үшін $\exists \delta > 0\, \forall x \in E\, (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta).$

Сонда $y = f(x), b = f(a)$ десек, $|x-a| < \delta$ болғанда $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon,$ яғни күрделі $h = g(f(x))$ функциясы aнүктесінде үзіліссіз. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Айталық a Eжиынының шектік нүктесі болсын. Сонда күрделі функцияның a нүктесінде үзіліссіздігінен $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$ теңдігі шығады, мұны $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$ деп жазуға болады,өйткені $f(x)$ функциясы a нүктесінде үзіліссіз, демек, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Сонымен, шекке көшу операциясы мен үзіліссіздік функция амалы операциясы орны ауыспалы.

1-теорема (Больцано-Коши).Егер кесіндіде үзіліссіз функцияның кесінді ұштарындағы мәндерінің таңбалары әртүрлі болса, онда осы кесіндіден функция мәні нөлге айналатын нүкте табылады.

Бұл теореманы логикалық символика арқылы былай жазар едік:

$$(f \in C[a,b]) \wedge (f(a)\cdot f(b)<0) \Rightarrow (\exists \xi \in [a,b](f(\xi)=0)).$$

Дәлелдеу. $[a,b]$ кесіндісін екіге бөлейік. Егер бөлген нүктеде функция нөлге тең болмаса, онда алынған екі кесіндінің біреуінің ұштарында функция әртүрлі таңбалы мән қабылдайды. Оны тағы екіге бөліп, осы процесті жалғастыра береміз. Сонда белгілі бір қадамнан соң $f(\xi)=0$ болатын $\xi \in [a,b]$ нүктесіне түссек теорема дәлелденген болады.Немесе нөлге ұмтылатын $\{I_n\}$ енгізілген кесінділер тізбегін аламыз. Бұл жағдайда Коши-Кантор енгізілген принципі бойынша осы алынған кесінділердің бәріне ортақ жалғыз $\xi \in [a,b]$ нүктесі табылады.Құрғанымыз бойынша I_n кесіндісінің ұштарынан түзілген $f(x'_n) < 0$ болатын $\{x'_n\}$ және $f(x'_n) > 0$ болатын $\{x''_n\}$ екі тізбегін алдық әрі бұл тізбектер шектері $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \xi$. Тізбек шегінің қасиеті мен үзіліссіздік анықтамасынан $\lim\limits_{n\to\infty} f(x') = f(\xi) \le 0$ және $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = f(\xi) \ge 0$. Сонымен, $f(\xi)=0$.

Теорема дәлелденді.

2-теорема (Коши). Егер $f(x)$ фукциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $f(a) \ne f(b)$ болса, онда $f(a)$ және $f(b)$ сандарының арасындағы кез-келген C саны үшін $f(\xi)=C$ болатын ең болмағанда бір $\xi \in (a,b)$ нүктесі табылады.

Бұны да логикалық символика арқылы былай жазуға болады:

$$(f \in C[a,b]) \wedge (f(a) \ne f(b)) \Rightarrow (\forall C \in (f(a), f(b)) \exists \xi \in (a,b)(f(\xi)=C))$$

Дәлелдеуі. $f(a) < C < f(b)$ болғандықтан

$$(g(x) = f(x) - C \in C[a,b]) \wedge (g(a)\cdot g(b)) = (f(a)-C)(f(b)-C) < 0),$$

$1-th$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \quad (g(\xi) - C = 0)$. Теорема дәлелденді.

1-теорема (Вейерштрасс). Кесіндіде үзіліссіз функция осы кесіндіде шектеулі.

Дәлелдеуі. $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы осы кесіндіде шектелмеген деп ұйғарайық. Онда $\forall M > 0 \, \exists \, x \in [a,b] \quad (|f(x)| > M)$. Енді $M = n \, (n = 1,2,...)$ деп $|f(x_n)| > n$ болатын $\{x_n\} \subset [a,b]$ тізбегін түземіз. Бұл $\{x_n\}$ тізбегі шектеулі, демек, Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша жинақталатын $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбек бөліп алуға болады. Айталық $x_{n_k} \to x_0, k \to \infty$ болсын.Ал $a \le x_{n_k} \le b$ болғандықтан $a \le x_0 \le b$. Сонымен бірге f функциясы үзіліссіз болғандықтан $f(x_{n_k}) \to f(x_0), k \to \infty$. Бұлай болуы мүмкін емес, өйткені $|f(x_n)| > n$ теңсіздігінен $|f(x_n)| > n_k$ және $f(x_{n_k}) \to \infty, k \to \infty$, екені шығады. Бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

2-теорема(Вейерштрасс). Кесіндіде үзіліссіз функция осы кесіндіде өзінің ең үлкенжәне ең кіші мәндерін қабылдайды.

Басқаша айтқанда,

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, x', x'' \in [a,b] \left| \left(f(x') = \inf_{[a,b]} f(x),\, f(x'') = \sup_{[a,b]} f(x) \right) \right..$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеуді тек дәл жоғарғы шекара үшін ғана жүргізсек болғаны, өйткені $\inf\limits_{[a,b]} f(x) = -\sup\limits_{[a,b]}(-f(x))$.

Айталық, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ болсын. Бізге $f(x'') = M$ болатын $[a,b]$ кесіндісінен x'' нүктесінің табылатынын көрсетсек болғаны. Керісінше, ондай нүкте жоқ деп ұйғарайық. Онда 3 параграфтың 1-теремасы бойынша $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және осы кесіндіде $g(x) > 0$. Ал 1-теорема бойынша $g(x)$ функциясы шектелген, яғни $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)} \le M_1$. Мұнан $f(x) \le M - \dfrac{1}{M_1} < M$. Бұлай болуы мүмкін емес, өйткені M саны $f(x)$ функциясын жоғарыдан шектейтін сандардың ең кішісі. Бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

Ескерту. Жоғарыдағы екі теоремада да функцияның тұйық, шектеулі жиында (ондай жиынды компакт деп атайды) үзіліссіздігінің маңызы зор. Мысалы, $y = \dfrac{1}{x}$ функциясы тұйық емес $(0,1]$ жарты сегментінде үзіліссіз, бірақ онда шектелмеген. Ал $y = arctg\, x$ функциясы бүкіл сан өсінде үзіліссіз(бұл тұйық шектелмеген жиын), бірақ өзінің дәл жоғарғы шекарасы $M = \dfrac{\pi}{2}$ мен дәл төменгі шекарасы $m = -\dfrac{\pi}{2}$ мәндерін қабылдай алмайды.

Функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі. Кантор теоремасы. Бірсарынды функцияның үзіліссіздік қасиеттері.Кері функция ның бар болуы. Негізгі элементар функциялар үзіліссіздігі.

1-теорема. $[a,b]$**кесіндісінде үзіліссіз** $f:[a,b] \to F$ **функциясының мәндер жиыны** $[m,M]$ **кесінді болады, мұндағы** $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Ескерту. Егер $f(x) = const$ болса, онда бұл кесінді нүктеге айналады. Өйткені бұндай функция үшін $m = M$.

Дәлелдеуі. Шынында да 5-параграфтың 2-Вейерштрасс теоремасы бойынша $F \subset [m,M]$ және $m, M \in F$, ал 4-параграфтың 2-Коши теоремасы бойынша $f(x)$ функциясы m мен M аралығындағы барлық мәндерді қабылдайды.

Ескерту. Бұл теоремадан $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болуы үшін оның мәндер жиынының да кесінді болуы қажетті екенін көреміз. Ал монотонды функция үшін бұл шарт жеткілікті де болатындығын келесі теорема көрсетеді.

2-**теорема**. Егер $f(x)$

функциясы $[a,b]$ кесі ндісінде монотонды және оның мәндер жиыны кесінді болса, онда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. Анықтылық үшін $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде кемімейтін деп есептеп, керісінше, ол $[a,b]$ кесіндісінде үзілісті деп ұйғарайық және $x_0 \in [a,b]$оның үзіліс нүктесі болсын. Онда $f(x_0-0) < f(x_0)$ немесе $f(x_0) < f(x_0+0)$. Бірінші жағдайда $x < x_0$ болғанда $f(x) \le f(x_0-0)$, ал $x \ge x_0$ болғанда $f(x) \ge f(x_0)$, яғни $f(x)$

функциясы $(f(x_0-0), f(x_0))$ аралығынан мән қабылдамайды. Дәл осылай екінші жағдайда $f(x)$ функциясы $(f(x_0), f(x_0+0))$ аралығынан мән қабылдамайтыны көрсетіледі. Екі жағдайда да функцияның мәндер жиыны кесінді бола алмайды. Бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

3-**теорема (кері функцияның бар болуы туралы).** Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және өспелі (кемімелі) болса, онда оның $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) кесіндісінде үзіліссіз және өспелі (кемімелі) $x=\varphi(y)$ кері функциясы бар.

Дәлелдеуі. Анықтылық үшін $f(x)$ функциясын $[a,b]$ кесіндісінде өспелі деп ұйғарайық. Үзіліссіз функцияның мәндер жиыны $[f(a), f(b)]$ кесіндісі болады, өйткені $\forall x \in [a,b]$ $(f(a) \le f(x) \le f(b))$ және 4-параграфтың 2-ші Коши теоремасы бойынша $f(x)$ функциясы $[f(a), f(b)]$ кесіндісіндегі кез-келген мәнін ең болмағанда бір рет қабылдайды. Ал $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде өспелі болғандықтан мәндер жиыны $[a,b]$ болатын $[f(a), f(b)]$ кесіндісінде анықталған $x=\varphi(y)$ кері функциясы бар. Бұл функция $\varphi(y)$ өспелі, шынында да, $\varphi(y_1) \ge \varphi(y_2)$ теңсіздігін қанағаттандыратын $[f(a), f(b)]$ кесіндісінен $y_1 < y_2$ болатын y_1, y_2 нүктелері табылады деп ұйғарсақ, онда $f(\varphi(y_1)) \ge f(\varphi(y_2))$, яғни $y_1 \ge y_2$ теңсіздігіне келер едік. Ал бұл $y_1 < y_2$ теңсіздігіне қайшы.

Сонда 2-теорема бойынша $\varphi(y)$ функциясы $[f(a), f(b)]$ кесіндісінде үзіліссіз. Теорема дәлелденді.

1⁰. Көпмүшелік нақты сандар жиынында үзіліссіз, өйткені кез-келген $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ көпмүшелігі мен кез-келген $a \in \mathrm{R}$ нақты саны үшін

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)\cdot \qquad (1)$$

Шынында да, $\lim\limits_{x\to a} x = a$ екені айқын, демек, әрбір k оң бүтін саны үшін

$$\lim_{x\to a} x^k = \underbrace{\lim_{x\to a} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to a} x}_{k\ \text{рет}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{k\ \text{рет}} = a^k \cdot$$

Сонда

$$\lim P(x) = \lim a_0 + \lim a_1 x + \ldots + \lim a_n x^n = a_0 + a_1 \cdot a + \ldots + a_n \cdot a^n = P(a),$$

$x \to a \qquad x \to a \qquad x \to a \qquad x \to a$

яғни (1) дәлелденді.

2⁰. Рационал функция өзінің анықталу аймағында үзіліссіз, өйткені

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

(мұндағы $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathrm{R}$, $Q(a) \neq 0$) рационал функциясының шегі

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} P(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

3^0^. Логарифмдік функция оң нақты сандар жиынында үзіліссіз, өйткені $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$. Бұл 3-тараудың 10-параграфында дәлелденген $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$ теңдігінен шығады, өйткені

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

4^0^. Көрсеткіштік функция нақты сандар жиынында үзіліссіз, өйткені $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Мұның да дәлелдеуі 3- тарауда келтірілген.

5^0^. x^α, $\alpha \in \mathrm{R}$ дәрежелік функциясы анықталу аймағында үзіліссіз.

Егер $\alpha = n \in \mathrm{N}$ болса, онда мұның үзіліссіздігін *1^0^* пунктте көрсеткенбіз. Егер $y = x^{-n}$, $n \in \mathrm{N}$ болса, онда бұл $x \neq 0$ аймақта үзіліссіз, өйткені $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ функциясы 3-параграфтың 1-теоремасы бойынша үзіліссіз. Егер $y = \sqrt[n]{x},\ n = 2,3,...;\ x \geq 0,$ болса, онда бірсарынды үзіліссіз $x = y^n$ функциясының кері функциясы ретінде 8-параграфтың 3-теоремасы бойынша үзіліссіз, өйткені $y \geq 0$. Ал рационал $r = \dfrac{p}{q}\ (q \geq 2,\ p \in \mathrm{Z})$ үшін $y = x^r = \sqrt[q]{x^p}$ функциясы $x > 0$ болғанда 3-параграфтың 4-теоремасы бойынша күрделі функция ретінде $(f(x) = \sqrt[q]{x},\ g(t) = t^p)$ үзіліссіз. Егер α кез-келген нақты көрсеткіш болса, онда барлық $x > 0$ үшін $y = x^\alpha$ функциясы көрсеткіштік және логарифмдік функциялар арқылы былай

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

өрнектелер еді де, 3-параграфтың 4-теоремасы (күрделі функция үзіліссіздігі) көмегімен оның үзіліссіздігі логарифмдік және көрсеткіштік функциялар үзіліссіздігінен шығады.

6^0^. $\sin x$ және $\cos x$ тригонометриялық функциялары нақты сандар жиынында үзіліссіз, яғни

$$\forall x_0 \in \mathrm{R}\ (\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \wedge \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0)$$

Шынында да, $\forall \varepsilon > 0\ \forall x_0 \in \mathrm{R}$ сандары мен $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < 2\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

яғни $\sin x$ функциясы R сандар жиынының кез-келген функциясының үзіліссіздігі

x_0 нүктесінде үзіліссіз. Ал $\cos x$

$$\left|\cos x-\cos x_0\right| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le \left|x-x_0\right|$$

теңсіздігінен шығады.

7^0. $tg\,x$ және $ctgx$ функциялары өздерінің анықталу жиынында үзіліссіз, яғни, егер $x_0 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ болса, онда

$$\lim_{x\to x_0} tgx = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = tgx_0,$$

ал егер $x_0 \neq n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, ...$ болса, онда $\lim\limits_{x\to x_0} ctgx = ctgx_0$.

8⁰. $\arcsin x$ функциясы $[-1,1]$ кесіндісінде үзіліссіз, өйткені $y = f(x) = \sin x$ функциясы $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісінде үзіліссіз және шектеулі, демек, оның $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесіндісіне тарылуының, 8-параграфтың 3-теоремасы бойынша, $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\frac{\pi}{2}\right] = [-1,1]$ кесіндісінде анықталған $-\frac{\pi}{2}$ –ден $\frac{\pi}{2}$ –ге дейін өсетін және осы кесіндіде үзіліссіз $x = \arcsin y$ кері функциясы бар.

9⁰. $\arccos x$ функциясы $[-1,1]$ кесіндісінде үзіліссіз, өйткені $y = \cos x$ функциясы $[0,\pi]$ кесіндісінде үзіліссіз және шектеулі, демек, оның $[0,\pi]$ кесіндісіне тарылуының 8-параграфтың 3-теоремасы бойынша, $[\cos\pi, \cos 0] = [-1,1]$ кесіндісінде анықталған π -ден 0-ге дейін кемитін және осы кесіндіде үзіліссіз $x = \arccos y$ кері функциясы бар.

10⁰. $y = tgx$ функциясы $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $-\infty$-тен $+\infty$-ке дейін өсетін үзіліссіз функция. Оның бүкіл R сан өсінде анықталған $-\frac{\pi}{2}$- ден $\frac{\pi}{2}$ -ге дейін өсетін $x = arctgy$ кері функциясы бар. Енді оның анықталу аймағының кез-келген y_0 нүктесінде үзіліссіз екенін көрсету үшін $x_0 = arctgy_0$ нүктесі мен осы нүкте жататын $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ аралығынан $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ кесіндісін алайық. Егер $x_0 - \varepsilon = arctg(y_0 - \delta_1), x_0 + \varepsilon = arcgt(y_0 + \delta_2)$ болса, онда $x = arctgy$ функциясының өспелі болғандығынан $\forall y \in (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$ үшін $x_0 - \varepsilon < arctg\, y < x_0 + \varepsilon$. Сонымен, барлық $-\delta_1 < y - y_0 < \delta_2$ үшін $|arctg\, y - arctg\, y_0| < \varepsilon$. Ал бұдан барлық $|y - y_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ теңсіздігін қанағаттандыратын y үшін де орындалатыны шығады. Бұл $x = arctgy$ функциясының $y_0 \in R$ нүктесінде үзіліссіздігін көрсетеді.

11⁰. Дәл осылай $y = ctgx$ функциясының $(0, \pi)$ аралығына тарылуы $+\infty$ -тен $-\infty$ -ке дейін кемитін үзіліссіз функция екенін және оның бүкіл R сан өсінде анықталған кемімелі үзіліссіз $x = arcctgy$ кері функциясының бар екенін де көрсетуге болады.

1-ескерту. Сонымен негізгі элементар функциялар мен олардың ақырлы рет қолданылған композициялары көмегімен түзілген және арифметикалық амалдарды қолданудан пайда болған функциялар (бұларды элементар функциялар деп атайды) өздерінің анықталу аймағында үзіліссіз. Сондықтан кез-келген элементар функцияның нүктеде үзіліссіздігін дәлелдеу үшін ол нүктенің анықталу жиын нүктесі екенін көрсету жеткілікті.

2-ескерту. Өзара кері $y = f(x)$ және $x = f^{-1}(y)$ функцияларының графиктерін бір координаттық жүйеде құрғанда $(x, f(x)) = (x, y)$ және $(y, f^{-1}(y)) = (y, x)$ нүктелерінің бірінші координаттық бұрыштың биссектриссасы арқылы симметриялы екенін есте ұстаған жөн. Сонда бір координаттық жүйеде салынған өзара кері функциялардың графиктері осы биссектрисса арқылы симметриялы болады екен.

Функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі

$f: E \to \mathrm{R}$ функциясы $E \subset \mathrm{R}$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз деп аталады, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ саны бойынша $|x' - x'| < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $x', x'' \in E$ сандары үшін $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын $\delta(\varepsilon)$ оң саны табылса.

Логикалық символикалар арқылы бұл анықтаманы былай жазуға болады: $f: E \to R$ функциясы E жиынында бірқалыпты үзіліссіз:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall x'' \in E \, \forall x' \in E \, \left(|x' - x'| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon\right).$$

Енді осы анықтаманы талқылап көрейік.

1^0.Егер функция жиында бірқалыпты үзіліссіз болса, онда ол жиынның кез-келген нүктесінде үзіліссіз. Шынында да, бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасында $x' = a$ десек, $f: E \to \mathrm{R}$ функциясының $a \in E$ нүктесінде үзіліссіздігінің анықтамасын аламыз.

2^0. Үзіліссіздік-функцияның бір ғана нүктеде анықталатын төңіректік (локальдік) ұғым болса, ал бірқалыпты үзіліссіздік функцияны бүкіл жиында анықталатын шартараптық (глобальдік)ұғым.

3^0. Үзіліссіздіктен жалпы жағдайда бірқалыпты үзіліссіздік шықпайды. Мысалы, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $(0,1) \in E$ аралығында үзіліссіз. Бірақ E жиынының 0 нүктесінің кез-келген маңайында функция –1 мәнінде, +1 мәнінде қабылдайды, сондықтан $\varepsilon < 2$ деп алсақ, бұл функция үшін бірқалыпты үзіліссіздік шарты орындалмаған.

Осыған байланысты функцияның бірқалыпты үзіліссіздігінің керілеуін келтірейік: $f: E \to \mathrm{R}$ функциясы E жиынында бірқалыпты үзіліссіз емес:

$$= \exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x_1, x_2 \in E \left(|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\right).$$

Мысалы, егер $f: E \to R$ функциясы белгілі бір $x_0 \in E$ нүктесінің кез-келген маңайында шектелмеген болса, онда бұл функция бірқалыпты үзіліссіз емес. Шынында да кез-келген $\delta > 0$ саны үшін x_0 нүктесінің $\frac{\delta}{2}$ маңайынан $|x_1 - x_2| < \delta$ болғанымен $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$ болатын $x_1, x_2 \in E$ нүктелері табылады.

Тағы бір мысал, $f(x) = x^2$ функциясы бүкіл R жиынында үзіліссіз, бірақ ол бұл жиында бірқалыпты үзіліссіз емес. Шынында да, $x_n' = \sqrt{n+1}, \; x_n'' = \sqrt{n}, \quad n \in N,$ нүктелерінде $f(x') = n+1, \; f(x'') = n,$ сондықтан $f(x_n') - f(x_n'') = 1.$ Ал

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Сондықтан $\varepsilon < 1$ және кез-келген $\delta > 0$ үшін $|x' - x''| < \delta$ болғанымен

$\left| f(x'_n) - f(x''_n) \right| = 1$ болатын x'_n, x''_n нүктелері табылады.

Функцияның бұл мысалдағы бірқалыпты үзіліссіз болмауының себебі оның шектеулі болмағандығынан деп ойлауға болмайды, мысалы, R жиынында үзіліссіз және шектеулі $f(x) = \sin x^2$ функциясы R жиынында бірқалыпты үзіліссіз болмайды, өйткені $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)}$, $x''_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}n}$, $n \in N$, нүктелерде $\lim_{n\to\infty} \left| x'_n - x''_n \right| = 0$ болғанымен $\left| f(x'_n) - f(x''_n) \right| = 1.$

1-теорема (Кантор). Кесіндіде үзіліссіз функция осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз.

Дәлелдеуі. Керісінше, $[a,в]$ кесіндісінде үзіліссіз функция осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз емес деп ұйғарайық, яғни

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x', x' \in [a,b] \quad (|x' - x'| < \delta \wedge |f(x') - f(x')| \geq \varepsilon).$$

Нөлге жинақталатын кез-келген $\{\delta_n\}$ оң сандар тізбегін алып,

$$|x'_n - x'_n| < \delta_n \wedge |f(x'_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$$

болатын

$$\{x'_n\} \subset [a,b],\ \{x'_n\} \subset [a,b]$$

екі тізбегін құрайық. Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша шектеулі $\{x'_n\}$ тізбегінен x_0 санына жинақталатын $\{x'_к\}$ іштізбегін бөліп алуға болады. $\{x'_{n_к}\} \subset [a,b]$ боғандықтан, $x_0 \in [a,b]$.Ал $|x'_n - x'_n| < \delta_n$ теңсіздігінен $x'_k - \delta_{n_k} < x'_k < x'_k + \delta_{n_k}$ теңсіздіктері шығатыны айқын. Сонда мұнан $к \to \infty$ ұмтылдырып шекке көшсек, $x''_{n_k} \to x_0$ аламыз.

Сонымен, $\{x'_{nk}\}, \{x'_{n_k}\}$ тізбектерінің екеуі де бір $x_0 \in [a,b]$ шегіне ұмтылады. Ал $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіздігінен $\{f(x'_{n_k})\}, \{f(x_{n'_k})\}$ тізбектері де бір $f(x_0)$ шекке ұмтылуы керек. Бірақ бұлай болмайды, өйткені

$\left| f(x_n') - f(x_n') \right.$

дәлелдейді.

>